

GdT Mesures spectrales

19/03/2026

Séance 2 - Paul - Calcul fonctionnel continu

H Hilbert dim infinie séparable.

$B(H) = \{\text{opérateurs bornés}\}$

But: si $a \in B(H)$ est normal ($a^*a = aa^*$) et $f \in \mathcal{C}(Sp(a))$,
on veut définir $f(a) \in B(H)$.

I) Définitions

Def: Soit A une k -algèbre^(unitaire), $a \in A$.
 $Sp_A(a) = \{\lambda \in k \mid a - \lambda id \notin A^{\times}\}$

Def: Une algèbre de Banach est A une $\mathbb{C}$ -algèbre munie
d'une norme d'algèbre $\| \cdot \|$ ($\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$)
qui soit complète.

Def: Une C^* -algèbre est une algèbre de Banach munie d'une
involution $*$ antilinéaire ($(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$) telle que
 $\forall a \in A, \quad \|a\|^2 = \|aa^*\|$

Exemples:

- 1) $B(H)$
- 2) $A \subset B(H)$ sous-algèbre fermée stable par $*$
- 3) X es compact, $\mathcal{C}(X) = \text{fonctions continues à val dans } \mathbb{C}$.
 $\|f\| = \|f\|_{\infty, X}$, $f^*(x) = \overline{f(x)}$
- 4) Banach mais pas C^* : $\ell^1(\mathbb{Z})$ + convolution, $(x_n)^* = (\overline{x_n})$

1

Exemples de spectres:

1) Shift à droite: $T: \ell^2 \mathbb{N} \rightarrow \ell^2 \mathbb{N}$

$$(x_n) \mapsto (x_{n+1}) \quad (0 \text{ en } 1)$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ $N_q (T - \lambda) \cdot (x_n)_n = 0$

$$\Leftrightarrow \forall n, x_{n+1} = \lambda x_n$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_n = x_0 \lambda^n & \text{si } |\lambda| < 1 \\ x_n = 0 & \text{si } |\lambda| \geq 1 \end{cases}$$

Donc $\mathring{D}(0,1) \subset Sp(T)$. En fait, $Sp(T) = \overline{D}(0,1)$.

2) $f \in \mathcal{C}(X)$. $\mathcal{C}(X)^* = \{f \mid f(x) \neq 0 \forall x\}$

donc $Sp(f) = \{f(x) \mid x \in X\} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid f - \lambda \text{ s'annule}\}$

Lemme: A alg de Banach, $a \in A$

rayon spectral

1) $Sp_A(a) \subset \overline{D}(0, \|a\|)$.
i.e. $\rho(a) \leq \|a\|$

Notation: $\rho(a) = \sup_{\lambda \in Sp(a)} |\lambda|$

2) $Sp_A(a)$ est fermé

3) $Sp_A(a) \neq \emptyset$.

C'est là qu'on utilise le fait d'avoir une algèbre de Banach

Preuves: $\forall x \in A, \|x\| < 1 \Rightarrow 1 - x \in A^\times$ et $(1-x)^{-1} = \sum_{n \geq 0} x^n$ (*)

ii) Donc $A^\times$ ouvert, donc $Sp_A(a)$ fermé.

i) Si $|\lambda| \geq \|a\|$, alors $\lambda - a = \lambda(1 - \lambda^{-1}a) \in A^\times$

Théorème de Liouville

iii) Soit $\varphi: A \rightarrow \mathbb{C}$ forme linéaire continue $\|a\| < 1$

Si $Sp_A(a) = \emptyset, \varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$\lambda \mapsto \varphi((a - \lambda)^{-1})$ est holomorphe par (*)

et $\xrightarrow{|\lambda| \rightarrow +\infty} 0$ identiquement, - donc φ est nulle par Liouville

(Détails p-3 des poly de Georges)

Donc $\forall \varphi$ forme linéaire, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\varphi(a - \lambda)^{-1} = 0$

$\Rightarrow$ Hahn-Banach $(a - \lambda)^{-1} = 0$, absurde $\square$

Théorème I: Soit $\text{Comp} =$ catégorie des esps compacts

$C_{ab}^* =$ catégorie des C^* -alg unitaires abéliennes

On a une équivalence de catégories

$$\text{Comp} \begin{matrix} \xleftarrow{\text{Spec}} \\ \xrightarrow{C} \end{matrix} (C_{ab}^*)^{\text{op}}$$

avec les transformations naturelles :

• $\text{ev} : X \xrightarrow{\sim} \text{Spec}(\mathcal{C}(X))$

• $G : A \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(\text{Spec}(A))$ (G est une isométrie)

Transformation de Gelfand

Théorème II: Soit $a \in B(H)$ normal ($a^*a = aa^*$).

Soit $C^*(a) = \overline{C[a, a^*]}$.

Alors $\text{Spec}(C^*(a)) = \text{Sp}(a)$

L'application $G^{-1} : \mathcal{C}(\text{Sp}(a)) \hookrightarrow B(H)$ est le calcul fonctionnel continu.

Théorème III: i) G^{-1} est l'unique C^* -morphisme tq

$G^{-1}(z \mapsto z) = a$

On note $f(a) = G^{-1}(f)$.

ii) $\text{Sp}(f(a)) = f(\text{Sp}(a))$

iii) G est une isométrie donc $\|f(a)\| = \|f\| = \sup_{\lambda \in \text{Sp}(a)} |f(\lambda)|$

III) Généralités: A une C^* -alg

Prop: i) $\forall a \in A$ tq $aa^* = a^*a = 1$, $Sp_A(a) \in S^1$.

ii) Si $a^* = a$ alors $Sp(a) \subset \mathbb{R}$ (7.6 dans le cours de Skandalis)

Corollaire: Soit $B \subset A$ une sous C^* -alg
et $a \in B$. Alors $Sp_B(a) = Sp_A(a)$

(Autrement dit, $\forall \lambda \notin Sp_A(a)$, $(a - \lambda)^{-1} \in C^*(a)$)

Preuve du cor: Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $x = (a - \lambda)(a - \lambda)^*$
Supposons $0 \notin Sp_A(x)$ et montrons que $0 \notin Sp_B(x)$.

i) $Sp_B(x) \setminus Sp_A(x) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} x - \lambda \in A^* \\ \text{et } (x - \lambda)^{-1} \notin B \end{array} \right\}$ est ouvert dans $\mathbb{C}$
et inclus dans $\mathbb{R} \Rightarrow = \emptyset$

Prop: $\forall a \in A$, $\|a^n\|^{1/n}$ cr et $\rho(a) = \lim \|a^n\|^{1/n}$ (4.6)

Cor: i) $\forall a \in A$, $\|a\| = \sqrt{\rho(a^*a)}$

ii) $\forall a \in A$ normal, $\|a\| = \rho(a)$

Preuve: i) Si $h^* = h$, $\|h^2\| = \|hh\| \xrightarrow{\text{réurrence}} \|h^{2^n}\| = \|h\|^{2^n}$
donc (ça converge avec la prop) $\rho(h) = \|h\|$. On prend $h = a^*a$.

ii) $\rho(a) = \lim \|a^n\|^{1/n}$
 $= \left(\lim \|a^n (a^n)^*\|^{1/n} \right)^{1/2}$
 $= \left(\lim \|(a^*a)^n\|^{1/n} \right)^{1/2} = \sqrt{\rho(a^*a)} = \|a\|$

GdT Mesures spectrales

19/03/2026

Cor: Si $\varphi: A \rightarrow B$ est un C^* morphisme alors φ est contractant.

Donc φ isomorphisme $\Rightarrow \varphi$ isométrie.

Preuve: Si $a - \lambda \in A^\times$ alors $\varphi(a - \lambda) \in B^\times$

donc $\rho(\varphi(a)) \leq \rho(a)$

donc $\|\varphi(a)\| = \sqrt{\rho(\varphi(a^*a))} \leq \sqrt{\rho(a^*a)} = \|a\|$ $\square$

IV - Spec

Maintenant, A est abélienne.

Def: $\text{Spec}(A) = \left\{ \underset{\substack{x \\ \downarrow \\ \text{ker } x}}{\chi: A \rightarrow \mathbb{C}} \mid \chi \text{ } C^* \text{-morphisme} \right\}$ (caractère)

$\{ \mathbb{I} \subset A \text{ idéaux maximaux} \}$

(Gelfand-Mazur) Lemme: Si B est une algèbre de Banach et un corps, alors $B = \mathbb{C}$.

Preuve: $x \in B$, $\lambda \in \text{Sp}(x)$, $x - \lambda \in B^\times = \{0\}$ donc $x = \lambda \cdot 1$ $\square$

Pour la topo générée par $\text{Spec}(A) \rightarrow \mathbb{C}$ pour $a \in A$
 $\chi \mapsto \chi(a)$ (convergence simple)

Lemme: $\text{Spec}(A)$ est compact

Preuve: $\text{Spec}(A) \subset A' \leftarrow$ forme lin. cont., top. faible*.
- forme dans $B_{1,1}(0,1) \subset A'$
 $\uparrow$ compact par Banach-Alaoglu.

Lemme: $\forall a \in A, \text{Sp}(a) = \{\chi(a) \mid \chi \in \text{Spec}(A)\}$

Preuve: $\Rightarrow \chi(a - \chi(a)) = 0$ donc $a - \chi(a) \notin A'$
 $\Leftrightarrow \lambda \in \text{Sp}(A), (a - \lambda)A \subset I$ maximal

$\uparrow$ born
 $\chi: A \rightarrow A/I \simeq \mathbb{C}$ s'annule sur $a - \lambda$, donc $\lambda = \chi(a)$ $\square$

Def: $G: A \rightarrow \mathcal{C}(\text{Sp}(A))$
 $a \mapsto (\chi \mapsto \chi(a))$

Prop: G est une isométrie (donc un isomorphisme)

Preuve: $a \in A, \|G(a)\| = \sup_{\chi \in \text{Spec}(A)} |\chi(a)| = p(a) = \|a\|$
 $\uparrow$ car a normal

donc $\text{Im}(G)$ fermé, stable par conjugaison, sous-alg.
séparante, donc (Stone-Weierstrass):
 $\text{Im}(G) = \mathcal{C}(\text{Sp}(A))$

Preuve Thm II:

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(C^*(a)) & \xrightarrow{\sim} & \text{Sp}(a) \\ \chi & \mapsto & \chi(a) \end{array} \quad \square$$

Preuve Thm III: facile, voir déjà vu! :-)